Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 11

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 23. Januar 2020, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 11.1 *Beweismechanikaufgabe* (*4 Punkte*)

Bitte gehen Sie in dieser Aufgabe nach den Regeln der Beweismechanik vor und geben Ihre Lösung auf einem separaten Blatt in den Briefkasten mit der Aufschrift „Beweismechanikaufgaben“ ab. Ihnen unbekannte Begriffe und Symbole können Sie in der Beweismechanik nachschlagen.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U, W \subset V$ zwei nichtleere Unterräume von V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $U \cap W = \{0\}$
(ii) Für alle $d, r \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\} \subset U$ linear unabhängig und $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\} \subset W$ linear unabhängig, so ist auch $A \cup B$ linear unabhängig.

Aufgabe 11.2 (*3 Punkte*)

Sei K ein Körper und seien $f = \sum_{i=0}^m a_i X^i$, $g = \sum_{i=0}^n b_i X^i \in K[X]$ zwei Polynome über K. Wir definieren das Produkt von f und g wie folgt:

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k,$$

wobei $\sum\limits_{i+j=k}$ die Summe über alle Tupel $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ bezeichnet, so dass $i + j = k$ gilt.

Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis annehmen, dass $K[X]$ ein K-Vektorraum und das Produkt $\cdot$ assoziativ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(K[X], +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einheit ist.
(b) Zeigen Sie, dass $(K[X], +, \cdot)$ zusammen mit der Skalarmultiplikation aus Aufgabe 8.1 eine lineare Algebra über K bildet.

Aufgabe 11.3 (*5 Punkte*)

Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Für $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ definieren wir eine Abbildung $U_A : K^m \to K^n$ durch $U_A(\alpha) = \alpha A$. Zeigen Sie, dass U_A für jedes $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ eine lineare Abbildung ist und bestimmen Sie die Matrixdarstellung von U_A bezüglich der Standardbasen von K^m und K^n. (Vgl. Beispiel 20.4(2))
(b) Sei $\mathcal{B}_1 := \{(0,2,1), (0,1,2), (1,0,1)\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{(-1,1,1), (-2,0,3), (0,3,2)\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Identitätsfunktion $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $\mathrm{id}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$.

Aufgabe 11.4 (*4 Punkte*)

Es sei K ein Körper.

(a) Sei $\pi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ eine bijektive Funktion und sei $f_\pi : K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$ gegeben durch

$$f_\pi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \cdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von f_π bezüglich der Standardbasis von $K^{n\times 1}$.

(b) Es sei $\mathbb{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine invertierbare Matrix P derart, dass für alle $\alpha \in K^{4\times 1}$ gilt: $P[\alpha]_{\mathcal{E}} = [\alpha]_{\mathbb{B}}$, wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis des K-Vektorraumes $K^{4\times 1}$ bezeichnet.